Слайд 1

Название работы

Слайд 2

В вариационном исчислении имеют дело с функционалами, точнее говоря, с интегральными функционалами. Здесь «аргументом» функционала является функция, т.е. точка в функциональном пространстве, а областью значений функционала — число, т.е. элемент из *R*. Решить задачу вариационного исчисления — это значит отыскать функцию, придающую при тех или иных условиях стационарное (минимальное или максимальное) значение функционалу.

Слайд 3

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Пусть — функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Простейшая задача ставится следующим образом: среди всех функций ,, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям закрепления на концах

(1.5)

(1.6)

найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

Слайд 4

Рассмотрим основная лемма вариационного исчисления.

Пусть и выполнено условие



Тогда .

Уравнение эйлера

 (1.11)

Так как *F*(*x*, *y*, *z*) — дважды непрерывно дифференцируемая функция по своим аргументам, то в фигурных скобках стоит непрерывная функция, поскольку *y*(*x*) предполагается непрерывно дифференцируемой.

Левая часть этого соотношения называется вариационной производной функционала

,

при этом предполагается, что функция  подставлена в *F* и вычисляется полная производная по *x*.

Итак, доказан следующий результат.

Для того, чтобы функционал  достигал на данной функции экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению эйлера(1.11). Интегральные кривые, т.е. решения уравнения Эйлера, называют экстремалями функционала .[

## Слайд 5

В конце 17 века П.Бернулли поставил задачу: какова должна быть плоская кривая, чтобы материальная точка, двигаясь без трения под действием силы тяжести, скатывалась из точки *A* в точку *B* за кратчайшее время. Эта кривая, дающая оптимальное решение, называется брахистохроной.

Перейдём к вариационной постановке задачи. Пусть уравнение кривой описывается функцией . Пусть в некоторый момент времени *t* движущаяся точка  находится на расстоянии *y* от оси *Ox*. Тогда её скорость  (1.1)

где*g*> 0 — ускорение силы тяжести.

Действительно, так как в начальный момент времени точка неподвижна, то в текущий момент *t* кинетическая энергия точки равна изменению её потенциальной энергии, т.е. ,

где*m*> 0 — масса точки.

Отсюда и следует формула (1.1). Заметим теперь, что пройденный путь *s*(*t*) материальной точки равен



.

Слайд 6

Из этих соотношений и из (2.1) получаем, что

,

откуда следует, что полное время *T* скатывания точки равно

(1.2)

Так как материальная точка должна находиться в начале координат при  и в точке *B* при *t = T*, то должны также выполняться соотношения . (1.3)

Итак, возникла задача о нахождении минимума интегрального функционала (1.2 Т) при дополнительных условиях (1.3).

Слайд 7

Примененный в работе метод решения краевых задач для дифференциальных урав­нений называют также методом сеток. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела (область решения краевой задачи) — ось балки, площадь пластины, поверхность оболочки и т. д.— покры­вается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. За неизвестные принимаются значения разыскиваемых функций в узлах сетки. Для этого строятся приближенные формулы для производных от функций, выраженные через узловые ординаты этихфункций (конечно-разностные операторы производных). Эти опера­торы подставляются в дифференциальное уравнение, и требуется, что­бы дифференциальное уравнение выполнялось в каждом узле сетки (такой прием называют в математике коллокацией). Граничные условия данной краевой задачи также формулируются с помощью конечно-разностных операторов.

Рассмотрим построение операторов для производных от одно­мерной функции  (рис. 4.1, а). Участок отыскания решения  разобьем на равные интервалы  и воспользуемся теоремой Тей­лора: если функция *f* непрерывна вместе со своими производными на отрезке , то эта функция в точкеможет быть выражена через производные в точке формулой

 (4.1)


Положим  и применим формулу (4.1) для точек  и 

(4.2)

Слайд 8

Ограничимся тремя членами ряда в (4.2) (что соответствует замене истинной кривой  квадратной параболой, проведенной через ординаты ). Тогда вычитая и складывая строки (4.2), найдем первую и вторую производные в точкеiв виде

(4.3)

(4.4)

Формула (4.3) показывает, что первая производная  при сделан­ном приближении вычисляется как отношение разности соседних ординат () к отрезку , т. е. приближенно тангенс угла наклона касательной вi-й точке заменяется тангенсом угла наклона секущей (рис. 4.1, б).

Вычисление по формулам (4.3) и (4.4) можно представить в виде схем, называемых операторами для вычисления производных и изо­браженных на рис. 4.1,*а* под сеткой узлов. Чтобы в точкеi вычислить производную, надо наложить центр оператора (отмеченный прямо­угольником) на эту точку и составить сумму произведений узловых ординат на соответствующие коэффициенты оператора.[46]

Слайды 9 и 10

Метод оптимизации

Слайд 11

Задача о брахистохроне решалась описанными методами как тестовая. Обнаружилось, что во многих случаях имеет место вычислительная неустойчивость. Выяснено, что причиной является наличие нерегулярной точки при х=0, в которой решение обращается в нуль, а подынтегральная функция – в бесконечность. На рисунке слева – пример неустойчивости при нахождении решения (аппроксимация подынтегрального выражения осуществлялось со вторым порядком точности по шагу интегрирования h). Справа корректное решение, которое было достигнуто за счет увеличения до 100 количества шагов интегрирования. Также применялись приемы регуляризации, в которых интеграл разбивался на 2 части: x<x0, с особой точкой х=0 и регулярную часть (x>x0>0).

Слайд 12

Рассмотрим практически важные задачи о прогибах балки.

На двух опорах *А* и *В*, расположенных в горизонтальной плоскости (рис. 1.2), свободно лежит цилиндрическая упругая тяжелая балка. Пренебрегая весом частей балки, лежащих вне опор, требуется определить форму изогнутой оси этой балки.

Все размеры, плотность и коэффициенты упругости балки считаются известными. Для решения воспользуемся принципом: если система в устойчивом равновесии, то при всех возможных перемещениях системы потенциальная энергия системы увеличивается.

Задачи теории упругости допускают как дифференциальную формулировку, так и вариационную об отыскании таких функций, которые сообщают некоторому функционалу ста­ционарное значение, когда вариация . В связи с применением ЭВМ в решении сложных задач прикладной теории упругости в последние два–три десятилетия было установлено, что конечноразностные аппроксимации во многих случаях предпочтительнее сочетать именно с вариационной постановкой задачи. Это позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета, избежать вывода диф­ференциальных уравнений в сложных случаях, упрощает формулировку граничных условий.

Слайд 13

Покажем идею этого метода на примере изгиба балки переменной жесткости (рис.). Дифференциальное уравнение изгиба балки выглядит следующим образом

 (25)

Но вместо построения конечно-разностного оператора непосред­ственно для этого дифференциального уравнения, составим функ­ционал потенциальной энергии Э балки, выраженный через проги­быv

. (26)

Здесь первое слагаемое представляет потенциальную энергию деформации балки, а все последующие— потенциал внешних сил, включая краевые воздействия.

Согласно вариационному принципу Лагранжа, истинная функция удовлетворяет урав­нению

(4.27)

Уравнение (4.25) служит диф­ференциальным уравнением Эйлера вариационной задачи (4.27).

В вариационно–разностном методе интегрирование в (4.26) выполняют по приближенной формуле прямоугольников, заменяя кривые  ступенчатыми линиями (рис.)

В вариационно–разностном методе интегрирование в (4.26) выполняют по приближенной формуле прямоугольников, заменяя кривые  ступенчатыми линиями (рис.)



Изгиб балки переменной жесткости

Это преобразует функционал (4.26) в сумму

(4.28)

где последнее слагаемое символически обозначает сумму членов, соответствующих краевым воздействиям. Теперь производные за­меним их центральными конечно-разностными выражениями

(4.29)

Что превращает (4.28) в функцию узловых ординат 


а вариационное условие (4.27) в систему уравнений

(4.30)

Слайд 14

Обозначим через **расстояние между опорами *–* линейную плотность балки, **– элемент дуги изогнутой оси балки. Введем систему координат.

Пусть ось *Ох* соединяет точку опоры, начало координат делит отрезок *АВ* пополам и ось *Оу* направлена вертикально вверх. Вычислим теперь потенциальную энергию балки, предполагая, что уравнение ее упругой оси есть . Потенциальная энергия, созданная упругими силами при изгибе, будет равна

,

Где *L* – длина части балки между опорами, – угол, образованный касательной с осью *Ох*, – постоянный коэффициент, зависящий от модуля упругости и момента инерции поперечного сечения балки. Вычислим теперь потенциальную энергию, созданную полем тяготения. Элемент балки будет иметь потенциальную энергию, равную , отсюда потенциальная энергия всех элементов балки равна

.

Слайд 15

Складывая найденные энергии, получим общую потенциальную энергию балки:

.

Подставляя (кривизна), получим:

.

Задача сводится к нахождению минимума *Е*. Подынтегральное выражение от *х* явно не зависит, мы можем таким образом воспользоваться изложенным выше приемом, чтобы сразу снизить порядок уравнения. Однако, получаемое при этом уравнение четвертого порядка имеет достаточно громоздкий вид и в общем случае элементарно не интегрируется. По этой причине ограничимся обычным в этой задаче приближенным решением.

Слайд 16

Рассмотрим задачу о прогибе балки с шарнирными опорами, решенную вариационным методом МКР.

Для реализации решения задач были написаны программы в системе программирования Pascal ABC, которые минимизируют на основе методов покоординатного спуска и конечных разностей заданный интеграл. Результат оптимизации сохраняется в текстовый файл xopt.txt, выводится график функции прогиба. На рисунке показана серий графиков прогибов при различных (относительных) значениях плотности материала балки.

Слайд 17

Рассмотрена задача расчета прогибов балки в случае небольших деформаций, когда кривизною балки пренебрегается. На слайде показана вариационная задача, краевые условия и исходные данные для расчета.

Слайд 18

Результаты расчета.

Слайд 19

Пластины в настоящее время нашли широкое применение в раз­личных областях техники — строительстве, авиации, судостроении, в машиностроении и т. д. Это объясняется тем, что присущие тонко­стенным конструкциям легкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей тех­нологичностью. В данной главе будут рассмотрены вопросы расчета пластин.

Геометрическое место точек, которые делят толщину пластины пополам, называется срединной плоскостью пластины(рис.).

В теории изгиба пла­стин срединная плос­кость играет такую же важную роль, как в сопротивлении материа­лов нейтральный слой при изгибе балок. Ли­нию, ограничивающую срединную плоскость пластины, называютконтуром пластины.

Условимся оси *x* и *y* располагать в средин­ной плоскости пластины, а осьz— направлять вниз. Соответст­венно основные компо­ненты перемещения точек срединной поверхности — вертикальные прогибы — будут обозначаться *w*. При изгибе срединная плоскость превращается в слегка искривленную поверхность прогибов , ее называютсрединной поверхностью изогнутой пластины (рис.).

Слайд 20

На рис. изображена пластина, у которой край жестко заделан, края и шарнирно оперты, а край свободен от закреплений.



Рис. Пластина с жестким и шарнирно–опертым краями

Наиболее просто гра­ничные условия запи­сать для заделанного края. В этом случае во всех точках кромки прогибы равны нулю, а также заделан­ное сечение пластины  не поворачивается (нормали и касательные к поверхности прогибов остаются соответственно вертикальными и горизонтальными), т. е. имеем

(3.13)

Эти условия вполне аналогичны условиям заделки сечения изги­баемого бруса, мысленно выделенного из пластины в направлении оси у (см. рис. 3.1).

Для шарнирно–опертого края, как и в балке, имеем два условия, например для 

(14)

поскольку свободный поворот сечения означает отсутствие в нем изгибающего момента Мх. Если бы на этой кромке был прило­жен внешний распределенный момент интенсивности тх, то вместо нуля в правой части второго условия (14) надо было бы написать .

В данном случае шарнирные опоры предполагаются жесткими и линия остается неизогнутой.

Слайд 21

Рассмотрим несколько простых примеров изгиба пластин, имею­щих важное значение для понимания особенностей работы пластин при изгибе.

Слайд 22

Постановка конкретной задачи о прогибах пластины.

Слайд 23

Серия графиков и таблица значений функции прогибов. Вычисления осуществлялись с помощью программы на языке Паскаль.

Слайд 24

Трехмерный график функции прогибов