Оценки погрешности и помехоустойчивости тракта аналого – цифрового преобразования в системах автоматического контроля и управления

Использование цифровой техники в системах управления, передачи информации, контроля и измерения обусловило необходимость применения аналого-цифрового преобразования. В частности, цифровые методы реализуются при измерении сигналов и помех в рельсовых цепях систем обеспечения безопасности движения [1], при построении цифровых интеллектуальных защит тяговых подстанций [2],[3],[4], для ввода информации в системах автоведения [5].

Аналого – цифровому преобразованию присущи методические погрешности, определяемые квантование по уровню, временной дискретизацией при фиксированном способе восстановления аналогового сигнала. Так как аналоговому сигналу сопутствует помеха, вопросы устойчивости преобразования всегда актуальны. В данной работе рассмотрена оценки погрешности и помехоустойчивости преобразования с учетом усреднения цифровых отсчетов, как метода борьбы с аддитивной помехой. Полученные результаты базируются на общем методологическом подходе, изложенном в монографии [6] и дополняют работы [3],[4] в части рассмотрения различных моделей случайных помех и систематизации результатов оценок погрешностей и помехоустойчивости.

Рассматриваются модели аналого-цифрового преобразования, приведенные на рисунке 1 (1,а – первая модель, 1,б – вторая модель, 1,в – третья модель).

а)



б)



в)



Рисунок 1. Модели аналого-цифрового преобразования.

 Здесь x - аналоговый входной сигнал, – аддитивная помеха, некоррелированная с сигналом, – погрешность квантования по уровню на выходе идеального квантователя (рис. 2,а), как функция сигнала y на его входе (рис. 2,б).



Рисунок 2. Квантование по уровню.

 Очевидно, что , где q – шаг квантования по уровню.

 Если n – разрядность аналого-цифрового преобразования, а – диапазон изменения сигнала y, то

Так, при n = 8, что соответствует разрядности типового АЦП, относительная максимальная погрешность квантования по уровню, приведенная к диапазону изменения преобразуемой величины, составляет

 Если дисперсия сигнала y1 много больше q2, что, как правило, имеет место, дисперсия погрешности квантования [6],[7] равна

а относительная среднеквадратическая погрешность

 Известно [6], что для гауссовского сигнала при выполнении соотношения дисперсии и квадрата шага квантования, указанного выше, погрешность квантования практически не коррелирована с сигналом y1. Следовательно, дисперсия погрешности квантования среднего значения l сигналов y2 на выходе квантователя, в l раз меньше дисперсии отдельного значения сигнала y2.

 Идеальный импульсный элемент ИЭт осуществляет временную дискретизацию сигнала y3. На выходе ИЭт – решетчатая функция – последовательность – функций с весами y3[nT].

где n = 0,1,2,…; T – шаг временной дискретизации.

 Линейное звено с передаточной функцией реализует операцию восстановления и является экстраполятором нулевого порядка (ЭНП).

 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) ЭНП имеет вид

 Отсюда следует, что ЭНП является фильтром нижних частот, вносящим запаздывание на .

 Для фильтрации аддитивной помехи на рисунке 1,б дополнительно введены звенья и , осуществляющие получение среднего значения l результатов преобразования, которые находятся на временной оси на расстоянии .

Итак, модель приведенная на рисунке 1,б отличается от модели, приведенной на рисунке 1,а наличием цифрового усреднения l последовательных результатов преобразования на одном шаге временной дискретизации.

 Модель, приведенная на рисунке 1,в содержит звено текущего усреднения за период временной дискретизации T:

его передаточная функция имеет вид

АФЧХ этого звена

Отсюда следует, что это звено вносит запаздывание на .

 Сигнал в моменты времени на выходе тракта преобразования z[nT], где n = 0,1,2,…, определяется выражениями:

для первой модели

для второй модели

для третьей модели

 В выражениях (7), (8), (9) при детерминированном входном сигнале погрешности квантования по уровню можно оценить сверху величиной .

 Погрешность преобразования (см. рисунок 1) при детерминированном входном сигнале определяется как

где

 Если результат преобразования используется в реальном времени, когда погрешность от запаздывания нельзя исключить, то величина принимается равной 0. В том случае, когда результат преобразования используется в исследовательских целях, либо в разомкнутых системах, погрешность от запаздывания исключается. В этом случае для первой модели при исключении запаздывания, вносимого экстраполятором нулевого порядка.

При исключении погрешности от запаздывания для второй модели результат усреднения относится к середине временного отрезка, на котором находятся усредняемые отсчеты. В этом случае , где – запаздывание в экстраполяторе нулевого порядка, .

Результаты, получаемые на второй модели при l = 1, совпадают с результатами, полученными для первой модели, при следующих условиях: в первой модели соответствует , , во второй модели; в первой модели соответствует , , во второй модели.

При исключении погрешности от запаздывания для третьей модели .

В качестве моделей случайного входного преобразуемого сигнала x(t) и помехи примем стационарные центрированные случайные процессы, заданные своими автокорреляционными функциями и . Сигнал и помеху примем статистически независимыми. Дисперсия погрешности преобразования

где М – математическое ожидание выражения в фигурных скобках.

 Из этого выражения следует

 Здесь – дисперсия сигнала на входе тракта преобразования, – дисперсия сигнала на выходе тракта преобразования при и отсутствии погрешности квантования по уровню, – дисперсии помехи на выходе тракта преобразования при x(t) = 0 и отсутствии погрешности квантования по уровню, – оценка сверху дисперсии погрешности квантования по уровню. Величина дисперсии погрешности квантования по уровню не превышает и, учитывая, что у современных АЦП число разрядов больше или равно 8, этой погрешностью можно пренебречь. – взаимокорреляционная функция сигналов x(t) и z(t).

 Следует обратить внимание на зависимость дисперсии погрешности от времени , что свидетельствует о нестационарности случайной функции . В дальнейшем будем использовать для оценки дисперсии погрешности преобразования .

 Рассмотрим составляющие выражения (11) (с учетом (7)) для первой модели.

 С учетом (8) для второй модели

 С учетом (9) для третьей модели

 Получим далее значения дисперсии для рассматриваемых трех моделей.

 Для первой модели

 Для второй модели

 Для третьей модели

 Выражение дисперсии помехи на выходе тракта преобразования совпадает с после замены на .

 Определим величину относительной дисперсии погрешности как

где – относительное значение дисперсии погрешности преобразования сигнала x при ;

 – относительное значение дисперсии погрешности преобразования, определяемые помехой при x = 0.

 Максимальной величине соответствует :

где – относительное максимальное значение погрешности преобразования сигнала x при .

 Выражения для трех моделей приведены в таблице 1. Последнее слагаемое в этих формулах есть . Остальные слагаемые определяют .

Таблица 1.

|  |  |
| --- | --- |
| Модель |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |

Выражение (21) для второй модели при l = 1 и , где – запаздывание, вносимое экстраполятором нулевого порядка, совпадает с (20), так как для первой модели .

Последнее слагаемое в выражениях (20), (21), (22) характеризует помехоустойчивость тракта преобразования.

Если в первой модели, в соответствии с приведенными выражениями, отношение мощности (дисперсии) помехи к мощности (дисперсии) сигнала на входе и выходе тракта одинаковы и равны , то для второй и третьей моделей отношение мощности (дисперсии) помехи на выходе к мощности сигнала изменилась. Анализ помехоустойчивости тракта преобразования за счет использования цифрового и аналогового усреднения для различных моделей помех будет приведен ниже.

Используя методику, приведенную в [6], разложив в ряд Маклорена автокорреляционную функцию сигнала, получены выражения – дисперсии погрешностей преобразования. Для дифференцируемых функций, заданных, в частности, выражениями автокорреляционных функций (23), (24), (25), приведенными в таблице 2,

Таблица 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Корреляционная функция  | Разложение функции в ряд Маклорена | k-ый член ряда, | № |
|  |  |  | (23) |
|  |  |  | (24) |
|  |  |  | (25) |
|  |  |  | (27) |

 Для недифференцируемых случайных функций, заданных, в частности, выражением автокорреляционной функции (27)

Выражения для различных автокорреляционных функций приведены в таблице 2. Выражения и для различных моделей приведены в таблице 3.

Таблица 3.

|  |  |
| --- | --- |
| Модель | ,  |
| 1 |  |
|  |
| 2 |  |
|  |
| 3 |  |
|  |

 При и l = 1 выражение для второй модели совпадает с для первой модели. В качестве оценки погрешности удобно использовать максимальное значение дисперсии погрешности и соответственно среднеквадратичное отклонение . Для вычисления этих оценок в диапазоне до 10 – 15% от СКО входного сигнала достаточно использовать, как правило, один – два члена ряда из выражений (30) – (34). В том случае, когда среднеквадрнатичную оценку погрешности преобразования удобно приводить к диапазону изменения входного сигнала, соответствующие относительные оценки погрешности делятся на величину , относительные оценки дисперсии делятся на .

 В частности, для гауссовского случайного процесса при определении диапазона изменения сигнала с вероятностью 0,997 величина , для закона равномерной плотности вероятности , для закона Симсона .

 Результаты расчета величин при преобразовании сигнала, заданного автокорреляционной функцией (23) – сигнала с постоянной спектральной плотностью мощности в полосе частот от 0 до – приведены на рисунке 3 для трех моделей преобразования: на рисунке 3,а – зависимость для первой модели, на рисунке 3,б – зависимость , l = 2,3,…,10 для второй модели при цифровом усреднении входного сигнала, на рисунке 3,в - зависимость для третьей модели при аналоговом интегрировании входного сигнала. Результаты расчета приведены для случая использования результатов преобразования в реальном времени ().



Рисунок 3. Результаты расчета величин

 Анализ проведенных расчетов для стохастических моделей сигналов, автокорреляционные функции которых приведены в таблице 2, показал, что при цифровом усреднении результатов отсчетов при l > 4 – 5 дисперсия погрешности преобразования сигнала практически не зависит от l. Сравнение оценок среднеквадратических погрешностей преобразования при цифровом и аналоговом интегрировании незначительно отличается уже при l ≥ 8.

 При использовании результатов преобразования в условиях, когда погрешность от запаздывания может быть исключена, дисперсия погрешности значительно уменьшается. Так, при аналоговом интегрировании сигнала с автокорреляционной функцией (23) при и при в диапазоне погрешностей, не превышающих 15%.

 При аналоговом интегрировании сигнала с автокорреляционной функцией (24) при и при в диапазоне погрешностей до 21% при и до 7,1% при .

 При цифровом усреднении сигнала с автокорреляционной функцией (23) при l = 10 при , при в диапазоне погрешностей до 15%.

 При цифровом усреднении сигнала с автокорреляционной функцией (24) при l = 10 при , при в диапазоне погрешностей до 21%.

Переходим далее к анализу помехоустойчивости. Выражения, характеризующие помехоустойчивость преобразования для рассмотренных моделей приведены в таблице 1 – последние слагаемые в формулах (20), (21), (22). При подстановке l = 1 в последнее слагаемое формулы (21) получаем последнее слагаемое (20), так как при l = 1 отсчеты помехи не усредняются.

 Учитывая четность автокорреляционной функции последнее слагаемое (21) приводится к виду:

В качестве моделей помех рассмотрим следующие:

**Первая модель**: помеха задана гармоническим сигналом частоты со случайными амплитудой, дисперсия которой равна , и фазой, равномерно распределенной от - до +. Автокорреляционная функция такой помехи определяется выражением

**Вторая модель**: помеха задана суммой k гармонических сигналов с частотами со случайными амплитудами, дисперсии которых соответственно равны ,, … , и фазами, равномерно распределенными от - до +. Автокорреляционная функция такой помехи определяется выражением

 **Третья модель**: помеха задана случайным стационарным центрированным процессом с постоянной спектральной плотностью мощности в диапазоне частот от до и равной нулю вне этого диапазона. Автокорреляционная функция такой помехи определяется выражением

 Выражения оценок помехоустойчивости для рассматриваемых моделей помех при цифровом усреднении получаем после подстановки выражений автокорреляционных функций помех (36), (37), (38) в (35), обозначив , . В результате получаем:

Для первой модели помехи:

 Для второй модели помехи:

Для третьей модели помехи:

 Сравнение оценок помехоустойчивости для первой и второй моделей помех (выражения (39), (40)) показывает, что в виду линейности рассматриваемой модели преобразования при пренебрежении погрешностью квантования по уровню анализ помехоустойчивости можно проводить для каждой частоты гармонической помехи, а затем рассматривать суммарный результат.

 Выражение оценок помехоустойчивости при аналоговом интегрировании получаем после подстановки (36), (37), (38) в последнее слагаемое (20),(21),(22) обозначив , . В результате получаем:

Для первой модели помехи:

 Для второй модели помехи:

Для третьей модели помехи:

Особенностью этого случая является то, что рассматриваемые интегралы не берутся в квадратурах. Потому выражение автокорреляционной функции раскладывается в ряд Маклорена с последующим взятием двойного интеграла и необходимостью на всех этапах рассматривать вопрос сходимости.

 После разложения в ряд получаем:

Ряд (45) в соответствии с теоремой Лейбница для знакочередующихся рядов сходится при и , где – i-ый член ряда. Выполнение первого условия обеспечивается наличием (2i+2)! в знаменателе. Определим далее при каком i выполняется второе условие :

 Это отношение при m>n и >1 превышает отношение .

 Следовательно, условие сходимости выполняется при

 Таким образом, при расчете по формуле (17) результат вычисляется как сумма членов ряда при плюс сумма членов знакопеременного степенного сходящегося ряда, начиная с , удовлетворяющего (18). Погрешность вычисления этой суммы оценивается величиной первого отброшенного члена и совпадает с ним по знаку.

 Расчеты, проведенные для моногармонической помехи, заданной автокорреляционной функцией при при цифровом усреднении показали, что мощность помехи на выходе тракта преобразования уменьшилась на 8.7% при l = 2, на 11% при l = 5, на 11.32% при l = 10. С увеличением частоты помехи вдвое при уменьшение мощности помехи на выходе тракта преобразования составляет 32% при l = 2, 38.5% при l = 5, 39.4% при l = 10.

 Расчеты, проведенные для помехи с постоянной спектральной плотностью мощности в заданной полосе частот с автокорреляционной функцией (38) при цифровом усреднении, показали, что уменьшение мощности помехи на выходе тракта преобразования при помехе, распределенной в полосе частот от 300 до 1200 Гц и составляет 11.6% при l = 3, на 16.8% при l = 5, на 18.8% при l = 10. При полосе помехи от 600 до 2400 Гц уменьшение мощности помехи на выходе тракта преобразования составляет 70.4% при l = 3, 84% при l = 5, 86.4% при l = 10.

 При аналоговом интегрировании результаты расчетов помехоустойчивости для моногармонической помехи показывают уменьшение мощности помехи на выходе тракта преобразования на 11.44% при , на 39.7% при , что близко к результатам, полученным при l > 5 в случае цифрового усреднения.

 При аналоговом усреднении помехи с постоянной спектральной плотностью мощности в полосе 300 – 1200 Гц и , уменьшение мощности помехи на выходе тракта преобразования составляет 19.6%, в полосе частот 600 – 2400 Гц и составляет 87.2%. Результаты расчетов показателей помехоустойчивости при цифровом и аналоговом усреднении отсчетов для помехи с постоянной спектральной плотностью мощности в заданной полосе частот достаточно близки при l > 5.

 Заключение.

1. Методика расчета оценок погрешности и помехоустойчивости тракта аналого-цифрового преобразования реализуется на моделях импульсных систем.
2. Получены выражения оценок методических погрешностей аналого-цифрового преобразования при заданной автокорреляционной функции входного сигнала. Оценки учитывают возможность цифрового и аналогового усреднения преобразуемого сигнала на шаге временной дискретизации.
3. Получены выражения оценок помехоустойчивости тракта аналого-цифрового преобразования, показывающие эффективность использования усреднения аддитивной помехи на щаге временной дискретизации. Приведено сравнение способов цифрового и аналогового усреднения.
4. Полученные результирующие выражения оценок погрешностей и помехоустойчивости преобразования для различных моделей стационарных дифференцируемых и недифференцируемых случайных процессов и аддитивных помех удобны для использования в инженерных расчетах.

Литература.

1. Бестемьянов, П.Ф. Методика оценки работоспособности рельсовых цепей тональной частоты при воздействии тока электроподвижного состава с асинхронным тяговым приводом / П.Ф. Бестемьянов, Ю.А. Кравцов, Е.Г. Щербина, А.Г. Чегуров // Вестник РГУПС. – 2012. - №1. – С. 87 – 92.
2. Гречишников, В.А. Универсальный измеритель / В.А. Гречишников // Мир Транспорта. – 2005. - № 3. - С. 44 – 51.
3. Баранов, Л.А. Синтез тракта аналого-цифрового преобразования в системах автоматического контроля и управления железнодорожного транспорта / Л.А. Баранов, В.А. Гречишников // Вестник РГУПС. – 2012. – № 1. – С. 78 – 86.
4. Баранов, Л.А. Инженерная методика синтеза тракта аналого-цифрового преобразования в автоматических системах железнодорожного транспорта / Л.А. Баранов, В.А. Гречишников // Электротехника. – 2012. - № 12. – С. 19 – 25.
5. Баранов, Л.А. Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава / Л. А.Баранов, Я. М. Головичер, Е. В. Ерофеев, В. М. Максимов. - М.: Транспорт, 1990. - 272 с.
6. Баранов, Л.А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления / Л.А. Баранов. – М., 1990. – 304 с.
7. Ефимов, В.М. Квантование по времени при измерении и контроле / В.М. Ефимов. – М.: Энергия, 1969.