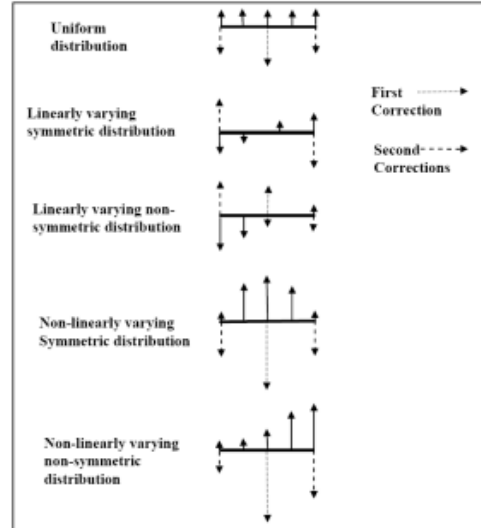


start to yield weaker results. But the likelihood of that type of distribution being the result of normal manufacturing processes is small.

If newer, lighter, faster turbines are to utilize shafts which run above their second or even third critical speed, then a



**Figure 3.** The low speed balancing technique developed for the first critical speed can be effective for various unbalance distributions along the length of the shaft.

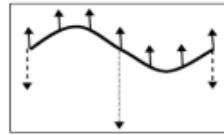
similar unbalance procedure will have to be found to permit low speed balance procedures to be used in the production environment. Let us therefore consider the approximate shape of the shaft as it goes through its second and third critical speeds, as shown in Fig. 4.



**Figure 4.** Typical shaft shapes at second and third critical speeds.

When balancing a flexible shaft, one must take into account the mode shape of the shaft. The points on the shaft where there is no motion (e.g. for the second bending mode these are typically the ends and center) which are called nodes. Balance corrections made at the nodes are very ineffective because the unbalance distributed across the actively moving part of the shaft is what creates the driving force that makes the shaft respond at its critical speed. To be effective, the forces created by the countering balance

corrections must offset the forces created by those distributed forces. As can be seen by looking at the mode shapes, corrections made at the nodes simply do not accomplish this. Therefore, the center correction which was so much help at the first critical speed will not address the second critical speed mode shape, as shown in Fig. 5, because all three balance corrections will be at locations where there is very little shaft motion, and the parts of the shaft which have significant motion have no offsetting balance correction.



**Figure 5.** The end and center balance correction planes are essentially nodes in the second critical speed mode shape, thus rendering them ineffective as balance correction locations for this shaft shape.

One might reasonably say that picking two balance correction planes, each one quarter of the way in from the ends of the shaft might be most effective. But that would only be effective for the second critical speed mode shape. If one considers that in order to get to the second critical speed, the shaft must already have gone through the first critical speed, then clearly the balance locations chosen have to be effective for both shapes. Given that reasoning, corrections  $1/4$ ,  $1/2$ , and  $3/4$  of the way along the shaft length make sense. If, however, our objective is to also find a low speed balance procedure that will potentially work for the third critical speed as well, then we need to consider how that would affect the shaft when it is running deflected in that shape. The maximum deflections in that shape are  $1/6$ ,  $3/6$ , and  $5/6$  along the length, so logic would say that these are the points at which to make corrections. However, the previously suggested corrections at  $1/4$ ,  $1/2$ , and  $3/4$  are not hugely different from this. ( $3/12$ ,  $6/12$ ,  $9/12$  versus  $2/12$ ,  $6/12$ ,  $10/12$ ) and are likely to be fairly effective for the third mode shape.

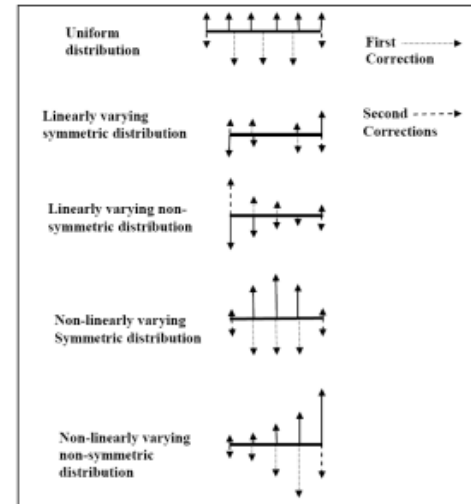
Keep in mind that the objective is to have a standardized balance procedure that can be used to low speed balance shafts quickly and efficiently on a production basis without requiring multiple balance trials and individual influence coefficient calculations on each shaft. Extending the logic that was used in the successful process developed for the supercritical shafts discussed earlier, let us examine the effect of a balance procedure as follows:

1. Use the low speed balance process to calculate shaft unbalance corrections at the shaft ends.
2. Add the two calculated unbalances, accounting for phase, and correct for  $1/4$  of this value at the center of the shaft, at a phase angle that is the average of those for the two calculated unbalances.
3. Take the calculated correction at the left end of the shaft and apply half that correction  $1/4$  of the way

along the shaft, and at an angle half way between the calculated end correction and the correction just made at the center.

4. Repeat step 3 for the right end.
5. Re-run the shaft on the balance machine, recalculate the end corrections and apply them as indicated
6. Check shaft for acceptability of final balance

Let us graphically examine this balance logic for the different unbalance distributions previously discussed. This is done in Fig. 6. Observation of these graphical results shows that corrections can be made across the length of the shaft that should reasonably correct for the unbalance distributions in a manner that accommodates the first three shaft bending modes.



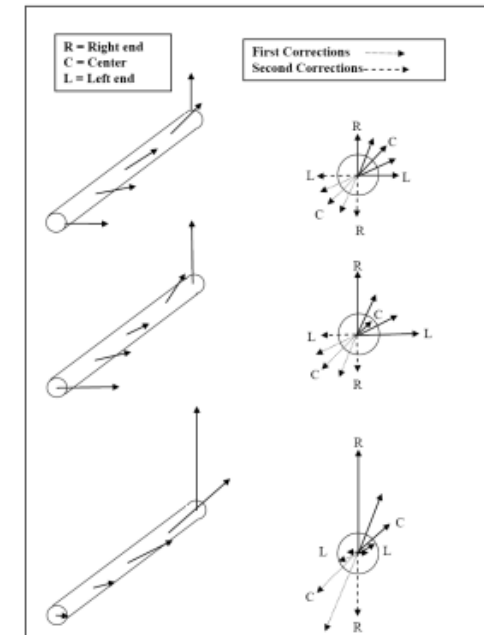
**Figure 6.** The low speed balancing technique proposed for the second and third critical speeds should be effective for various unbalance distributions along the length of the shaft.

Up to this point, we have assumed that all the unbalance is distributed in-plane. That is, the unbalance vectors are at either  $0^\circ$  or  $180^\circ$  relative to a fixed angular shaft location. Let us consider what the effect would be if the phase distribution varied in Fig. 7.

In the cases shown, the phase relationship between the ends varies through ninety degrees rather than being fixed at  $0^\circ$  or  $180^\circ$ . In all cases the resulting final state of balance is not as good as it would have been in the previous cases where the unbalance distribution was all in the same plane. However, in each case, the final state of balance is significantly better than it would have been if the shaft had gone through a simple two plane balance process. Still, the limitations of this process must be recognized. It is most

effective for an out-of-balance distribution that is essentially all in one plane. The effectiveness decreases as the unbalance vectors rotate in angularity as you move along the shaft. This would correspond to a shaft in which the bore corkscrews relative to the outer diameter surface.

Typical manufacturing errors are more likely to produce a shaft where the outer diameter (OD) and inner diameter (ID) centerlines are either offset or skewed rather than the "corkscrew" distribution just described.



**Figure 7.** The low speed balancing technique proposed for the second and third critical speeds is evaluated if phase is also allowed to vary.

If in step 5 of the balance process, the predicted corrections are not appreciably less than they were in step 1, then there is a significant likelihood that the shaft has a more complex unbalance distribution that will not yield as readily to this balance procedure. The likelihood of this occurrence will be reduced if tight tolerances are held for centerline offset and wall thickness and if inspection is done on these dimensions before a shaft is accepted and sent to balance. That being the case, the balance procedure described and demonstrated should be able to greatly improve the ability of a shaft to operate at higher critical speeds as effectively as existing supercritical shafts currently operate at the first critical speed.

However, the assumption thus far has been that the shaft is of uniform diameter and wall thickness (i.e. constant cross

времени. Также необходимо добавить время на закрепление вала и настройку приборов перед запуском. Таким образом, для высокоскоростной балансировки требуется не только более дорогое оборудование, но и значительно больше времени на работу, что еще больше увеличивает стоимость процедуры балансировки.

По этой причине было желательно разработать процедуру балансировки, которая не только могла бы выполняться полностью на низкой скорости, но и позволяла бы вносить поправки в третьей плоскости, тем самым лучше корректируя работу на первой критической скорости. Опыт в газотурбинной промышленности показал, что можно модифицировать процедуру балансировки на низкой скорости, сделав определенные предположения о вале [9]. Используя основное предположение о типе распределения дисбаланса по длине вала и о том, что форма, которую вал примет во время работы, является простым синусоидальным (от 0 до  $\pi$ ) распределением, можно было вывести процесс балансировки на низкой скорости, при котором балансировочная машина определяет величину дисбаланса, который должен был быть выполнен на двух концах для стандартной процедуры балансировки на низкой скорости. Используя половину общей величины рассчитанных поправок в концевых плоскостях, и вместо этого применяя эту величину поправки в центральной плоскости, можно было приблизительно определить третью плоскость коррекции баланса. Затем был выполнен второй запуск балансировочного станка, снова используя его для расчета поправок в двух концевых плоскостях. На этот раз поправки действительно были сделаны в этих плоскостях, и вал стал считаться сбалансированным. Повторное использование этой процедуры оказалось успешным на ряде валов для производства газовых турбин, используемых в настоящее время в аэрокосмической промышленности.

Даже если распределение дисбаланса вдоль вала не является равномерным, как показано на рис. 1, эта процедура позволит достичь удовлетворительного баланса для других распространенных распределений дисбаланса, которые могут быть обнаружены в результате производственных дефектов, как показано на рис. 3.

Эти данные не учитывают разность фаз, отличную от нуля и 180 градусов. Но исследование покажет, что при других фазах процедура расчета коррекции дисбаланса центрального вала на самом деле даст гораздо более точно сбалансированный вал, чем стандартная процедура балансировки в двух плоскостях на низкой скорости. И в большинстве случаев она приближается к точности

высокоскоростной процедуры балансировки, но при гораздо меньших затратах средств и времени, что крайне важно в производственных условиях. Только если распределение дисбаланса начинает "штопорить" по длине вала, процедура начинает давать более слабые результаты. Но вероятность того, что такое распределение является результатом нормальных производственных процессов, невелика.

Если в новых, более легких и быстрых турбинах будут использоваться валы, работающие выше второй или даже третьей критической скорости, то

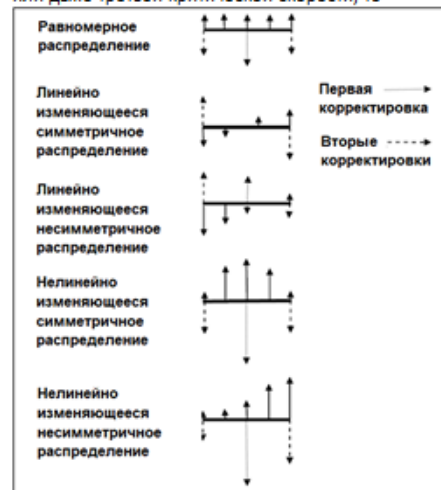


Рисунок 3. Техника балансировки на низкой скорости, разработанная для первой критической скорости, может быть эффективна для различных дисбалансов распределений по длине вала.

необходимо будет найти аналогичную процедуру дисбаланса, которая позволит использовать процедуры балансировки на низких скоростях в производственных условиях. Поэтому рассмотрим примерную форму вала при прохождении им второй и третьей критических скоростей, как показано на рис. 4.



Рисунок 4. Типичные формы валов при второй и третьей критических скоростях.

При балансировке гибкого вала необходимо учитывать собственную форму изгиба вала. Точки на

валу, где нет движения (например, для второй формы изгиба это обычно концы и центр), называются узлами. Корректировки баланса в узлах очень неэффективны, поскольку дисбаланс, распределенный по активно движущейся части вала, создает движущую силу, которая заставляет вал реагировать с критической скоростью. Чтобы быть эффективными, силы, создаваемые противодействующими корректировками баланса, должны компенсировать силы, создаваемые этими распределенными силами. Как можно видеть, глядя на собственные формы изгибов, поправки, сделанные в узлах, просто не достигают этого. Поэтому корректировка по центру, которая так помогла при первой критической скорости, не поможет при второй критической скорости, как показано на рис. 5, потому что все три корректировки баланса будут находиться в местах, где движение вала очень мало, а части вала, которые имеют значительное движение, не имеют компенсирующей корректировки баланса.

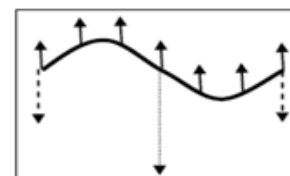


Рисунок 5. Концевая и центральная плоскости корректировки баланса являются по своей сути узлами в форме второго критического скоростного режима, что делает их неэффективными в качестве мест корректировки баланса для этой формы вала.

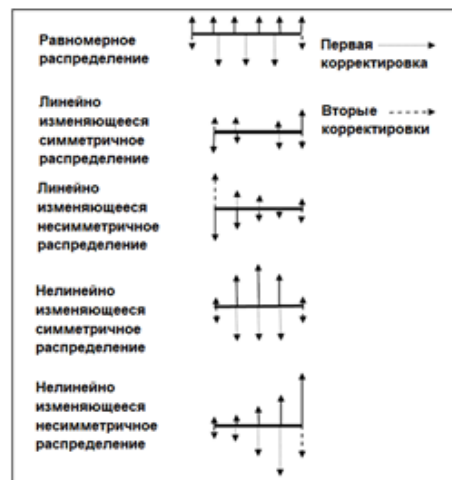
Можно обоснованно сказать, что наиболее эффективным будет выбор двух плоскостей корректировки баланса, каждая на четверть расстояния от концов вала. Но это будет эффективно только для собственной формы изгиба второй критической скорости. Если учесть, что для достижения второй критической скорости вал уже должен пройти через первую критическую скорость, то очевидно, что выбранные места баланса должны быть эффективны для обеих форм. Исходя из этого, поправки на  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$  длины вала имеют смысл. Если, однако, наша цель - найти процедуру балансировки на низкой скорости, которая потенциально будет работать и для третьей критической скорости, тогда мы должны рассмотреть, как это повлияет на вал, когда он работает с отклонениями в этой форме. Максимальные отклонения в этой форме составляют  $1/6$ ,  $3/6$  и  $5/6$  по длине, поэтому логика говорит о том, что именно в этих точках следует проводить корректировку. Однако предложенные ранее

поправки на  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$  не сильно отличаются от этого ( $3/12$ ,  $6/12$ ,  $9/12$  против  $2/12$ ,  $6/12$ ,  $10/12$ ) и, вероятно, будут достаточно эффективны для третьей собственной формы изгиба. Следует помнить, что цель состоит в том, чтобы иметь стандартизированную процедуру балансировки, которая может быть использована для низкоскоростной балансировки валов быстро и эффективно на производстве, не требуя многочисленных балансировочных проб и вычисления индивидуального коэффициента влияния для каждого вала.

Следует помнить, что цель состоит в том, чтобы иметь стандартизированную процедуру балансировки, которая может быть использована для низкоскоростной балансировки валов быстро и эффективно на производстве, не требуя многочисленных балансировочных проб и вычисления индивидуального коэффициента влияния для каждого вала. Расширяя логику, которая была использована в успешном процессе, разработанном для сверхкритических валов рассмотренной ранее, рассмотрим эффект от балансировки следующим образом:

1. Используйте процесс балансировки на низкой скорости для расчета поправок на дисбаланс вала на концах вала.
2. Сложите два рассчитанных дисбаланса с учетом фазы и скорректируйте  $\frac{1}{4}$  этой величины в центре вала при фазовом угле, который является средним значением для двух рассчитанных дисбалансов.
3. Возьмите рассчитанную корректировку на левом конце вала и примените половину этой корректировки на  $\frac{1}{4}$  пути вдоль вала и под углом, равным половине угла между рассчитанной корректировкой на конце и только что сделанной корректировкой в центре.
4. Повторите шаг 3 для правого конца.
5. Повторно проведите вал на балансировочном станке, пересчитайте концевые поправки и примените их, как указано.
6. Проверьте вал на приемлемость окончательного баланса

Представим графически эту логику баланса для различных распределений дисбаланса, рассмотренных ранее. Это сделано на рис. 6. Наблюдение за этими графическими результатами показывает, что по длине вала могут быть сделаны корректировки, которые должны разумно исправить распределения дисбаланса таким образом, чтобы учесть первые три собственные изгиба вала.

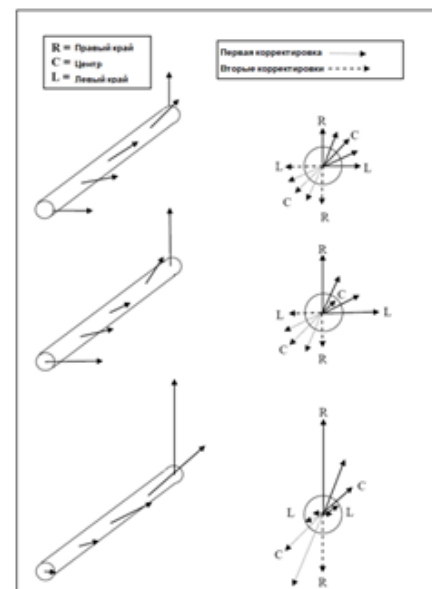


**Рисунок 6.** Техника балансировки на низких скоростях, предложенная для второй и третьей критических скоростей, должна быть эффективной для различных распределений дисбаланса по длине вала.

До этого момента мы предполагали, что все дисбалансы распределены в плоскости. То есть, векторы дисбаланса находятся под углом  $0^\circ$  или  $180^\circ$  относительно фиксированного углового положения вала. Позвольте нам рассмотреть, какой эффект будет, если распределение фаз будет меняться, как показано на рис. 7.

В показанных случаях фазовые соотношения между концами изменяются на девяносто градусов, а не фиксируются на  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . Во всех случаях конечное состояние баланса не такое хорошее, как в предыдущих случаях, когда распределение дисбаланса находилось в одной плоскости. Однако в каждом случае конечное состояние баланса значительно лучше, чем, если бы вал проходил через простой процесс балансировки в двух плоскостях. Тем не менее, следует признать ограничения этого процесса. Он наиболее эффективен при дисбалансе, который находится в одной плоскости. Эффективность снижается по мере того, как векторы дисбаланса поворачиваются под углом по мере продвижения вдоль вала. Это соответствует валу, в котором отверстие закручивается в штопор относительно поверхности наружного диаметра.

Типичные производственные ошибки чаще всего приводят к получению вала, у которого наружный диаметр (OD) и внутренний диаметр (ID) центральные линии скорее смещены или перекошены, нежели "штопорное" распределение, описанное выше.



**Рисунок 7.** Техника балансировки на низкой скорости, предложенная для второй и третьей критических скоростей, оценивается, если фаза также может изменяться.

Если на шаге 5 процесса балансировки прогнозируемые корректировки не заметно меньше, чем на шаге 1, то существует значительная вероятность того, что вал имеет более сложное распределение дисбаланса, которое не так легко поддается этой процедуре балансировки. Вероятность такого развития событий уменьшится, если будут соблюдаться жесткие допуски на смещение центра и толщины стенки и если проверка этих размеров будет проводиться до того, как вал будет принят и отправлен на балансировку. В этом случае, описанная и продемонстрированная процедура балансировки должна значительно улучшить способность вала работать на более высоких критических скоростях так же эффективно, как существующие сверхкритические валы, работающие в настоящее время на первой критической скорости.

Однако до сих пор предполагалось, что вал имеет одинаковый диаметр и толщину стенок (т.е. неизменное поперечное сечение по всей длине). Если поперечное сечение вала изменяется, то собственные формы изгибов не будут соответствовать "типичным" формам, которые использовались для формирования наших предыдущих предположений. Узловые точки и точки максимального изгиба не будут находиться в

section along its length). If the shaft cross section varies, then the mode shapes will not match the "typical" shapes which were used to form our earlier assumptions. The node points and points of maximum deflection will not be in the same locations as we have assumed. This means that choosing the locations of the correction planes is more complicated. In order to pick the optimum location, a more accurate prediction of the mode shapes at the critical speeds is required.

### FINDING MODIFIED SHAPE FUNCTIONS

Let us begin by constructing a model of the shaft as a series of elements, 1 through n, as shown in Fig. 8. Each element will have a mass, assumed to be located at the center of the element, and a stiffness, which can be estimated fairly accurately from beam element theory. This stiffness calculation is a fairly common approach using Euler or Timoshenko beam theory which can be found in any number of classical textbooks [10,11].

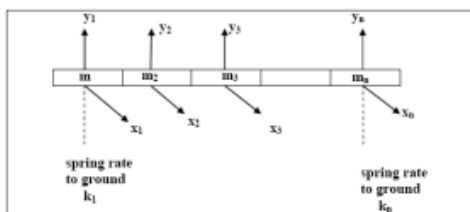


Figure 8. Mass element model of a shaft segment.

The dynamic equation for the shaft shown in Figure 8 can now be written in the matrix form

$$[M]\{X''\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (1)$$

Where  $\{X\}$  is the vector of all displacements:

$$\{X\} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

and  $\{X''\}$  is the acceleration vector of those same displacements, that is the second derivative of the displacements with respect to time

$$\{X''\} = \begin{bmatrix} d^2x_0 \\ d^2x_1 \\ \vdots \\ d^2x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$[M]$  is the mass matrix, containing all of the individual elemental masses, determined from the volume of each element times the mass density of the material comprising that element.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

$[K]$  is the stiffness matrix, containing the stiffness effects of all the individual elemental stiffnesses.

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_{1,1}+k_{1,2}) & -k_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_{1,2} & (k_{1,2}+k_{2,3}) & -k_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_{2,3} & (k_{2,3}+k_{3,4}) & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1,n} & (k_{n-1,n}+k_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

These make up the terms of the system matrix equation

$$[M]\{X''\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (6)$$

We expect to have harmonic oscillations for a vibrating system. If we therefore assume a harmonic solution of the form  $x = e^{i\omega t}$  then  $x' = i\omega e^{i\omega t}$  and  $x'' = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$ , letting  $\lambda = \omega^2$  and substituting into the matrix equation, we get

$$-\lambda[M]\{X\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (7)$$

Rearranging,

$$[K]\{X\} - \lambda[M]\{X\} = \{0\} \quad (8)$$

Multiply all terms by  $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1}[K]\{X\} - \lambda[M]^{-1}[M]\{X\} = \{0\} \quad (9)$$

Letting  $[A] = [M]^{-1}[K]$ , we have

$$[A]\{X\} - \lambda[I]\{X\} = \{0\} \quad (10)$$

or

$$[[A] - \lambda[I]]\{X\} = \{0\} \quad (11)$$

Which we recognize as the standard expression for an eigenvalue problem. The eigenvectors that would result from this equation would correspond to the mode shapes that we want to use for our shape functions.

Each of the normalized eigenvectors resulting from the above process will yield pairs of points which correspond to a mode shape of the model created in Fig. 8. A curve plotted through these points would define the shape function for the mode. We can define the shape function as a continuous function of  $z$ , the distance along the shaft. In reality, what we have are normalized vectors  $\{X\}$ , where each term,  $x_n$ , of the vector relates to the normalized displacement of each local

coordinate  $x_n$  that defines the motion at the individual mass elements  $m_n$  of the model at locations  $z_n$  along the length of the shaft. In order to create a continuous shape function for each of these, we must fit a polynomial to the pairs of points. Since the deflection points that we have from the mode shapes will not necessarily be equally spaced, Newton's interpolation approach is a possible method for determining a curve fit. The resulting mode shapes for a non-uniform shaft, as determined using this technique are shown in Fig. 9.

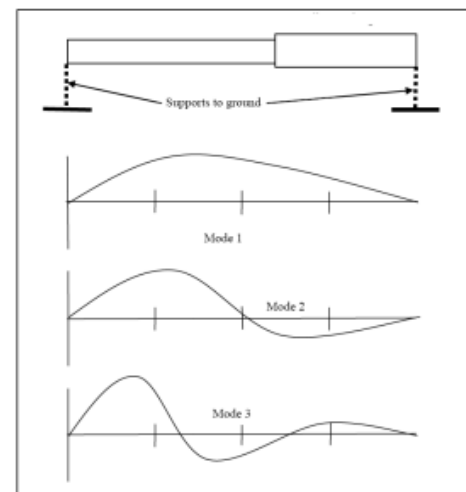


Figure 9. Mode shapes for a non-uniform shaft.

This can be done to create a polynomial  $\beta_n$  for each eigenvector/mode shape  $\{X_n\}$ . To precisely find the nodes we can determine the zeros of this polynomial. The maximums of the curve would be good approximations for the maximum deflection points in the mode shapes, and could thus be used to choose the unbalance correction planes. In this way, they can be tailored to a specific shaft of varying cross section. The same method for determining balance correction amounts, used in the previous discussion, would be used, however the locations would be changed based on this analysis.

### ANALYTICAL RESULTS

In order to analytically test the credibility of the described approach, a simple rotordynamic analysis routine is required. Numerous routines are readily available for creating finite element models and analyzing the response of rotating structures. Any program which accurately represents the mass, stiffness, and gyroscopic effects of the rotating shafting and the support stiffness can be utilized in such an analysis. Using such a program, the previously described low speed balance approach has been applied to some of the unbalance distributions which were shown in Fig. 6 and Fig. 7. A uniform unbalance distribution and a non-symmetric

unbalance distribution were examined. Data from four balance conditions were used. Condition A is the unbalanced state. Condition B simulates the effect of performing a traditional, two plane, low speed balance. The low speed balance procedure discussed in this paper is shown in condition C. Condition D is an attempt to simulate the effects of performing a high speed balance procedure on the shaft. Analysis results were produced up through the third critical speed or bending mode of the shaft. The results were normalized against the greatest response (which is, as should be expected, the uncorrected unbalance of condition A). The comparisons shown in Fig. 10 represent the predicted responses of a constant diameter shaft which began with an unbalance distribution which was entirely in-phase, similar to what was previously shown in Fig. 6. The comparisons shown in Fig. 11 represent the predicted responses of the same shaft, but with an initial unbalance distribution which varied in phase, similar to what was shown in Fig. 7.

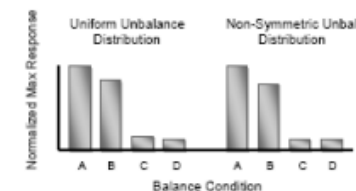


Figure 10. Analytical comparison of responses for a uniform shaft with in-phase unbalance distribution under various balance conditions.

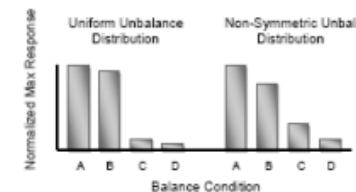


Figure 11. Analytical comparison of responses for a uniform shaft with out-of-phase unbalance distribution under various balance conditions.

A non-uniform, stepped shaft, as discussed earlier and shown in Fig. 9, was examined next. The same sets of initial unbalance states and balanced conditions were run on this shaft. However, the balance procedure associated with condition C was modified as discussed in the previous section of this report to account for the change in mode shape associated with a shaft that had two different diameter segments. The comparisons shown in Fig. 12 represent the predicted responses for an unbalance distribution which was entirely in-phase. The comparisons shown in Fig. 13 represent the predicted responses of the same shaft, but with an initial unbalance distribution which varied in phase.

тех же местах, как мы предполагали. Это означает, что выбор расположения корректирующих плоскостей является более сложным. Для того, чтобы выбрать оптимальное расположение, требуется более точное предсказание собственной формы изгиба на критических скоростях.

### НАХОЖДЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ

Прежде всего, начнем с построения модели вала в виде серии элементов, от 1 до n, как показано на рис. 8. Каждый элемент будет иметь массу, предположительно расположенную в центре элемента, и жесткость, которая может быть оценена достаточно точно из балочной теории. Эта жесткость является довольно распространенным подходом с использованием теории балок Эйлера или теории изгиба балок Тимошенко, которую можно найти в любом количестве классических учебниках [10,11].

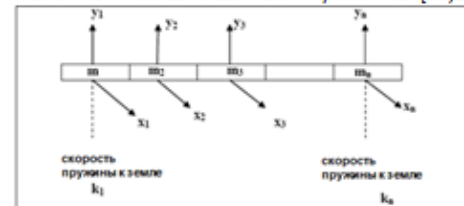


Рисунок 8. Модель элемента массы сегмента вала.

Динамическое уравнение для вала, показанного на рисунке 8, теперь может быть записано в матричной форме

$$[M] \{X''\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (1)$$

Где  $\{X\}$  – вектор всех перемещений:

$$\{X\} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

и  $\{X''\}$  – вектор ускорения тех же самых перемещений, то есть вторая производная от смещения по отношению к времени

$$\{X''\} = \begin{bmatrix} d^2x_0 \\ d^2x_1 \\ \vdots \\ d^2x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$[M]$  – матрица масс, содержащая все отдельные элементарные массы, определяемые из объема каждого элемента, умноженного на плотность массы материала, из которого состоит данный элемент.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

$[K]$  – матрица жесткости, содержащая эффекты жесткости всех отдельных элементарных жесткостей.

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1+k_{1,2}) & -k_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_{1,2} & (k_{1,2}+k_{2,3}) & -k_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_{2,3} & (k_{2,3}+k_{3,4}) & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1,n} & (k_{n-1,n}+k_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Они составляют элементы матричного уравнения системы

$$[M]\{X''\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (6)$$

Мы ожидаем гармонических колебаний для вибрирующей системы. Поэтому если мы предположим гармоническое решение вида  $x = e^{i\omega x}$ , тогда  $x' = i\omega e^{i\omega x}$  и  $x'' = (i\omega)^2 e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$ , пусть  $\lambda = \omega^2$  подставляя в матричное уравнение, получаем

$$-\lambda[M]\{X\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (7)$$

Перестраивая

$$[K]\{X\} - \lambda[M]\{X\} = \{0\} \quad (8)$$

Умножьте все слагаемые на  $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1}[K]\{X\} - \lambda [M]^{-1}[M] \{X\} = \{0\} \quad (9)$$

Пусть  $[A] = [M]^{-1} [K]$ , мы имеем

$$[A]\{X\} - \lambda [I]\{X\} = \{0\} \quad (10)$$

Или

$$[ [A] - \lambda [I] ]\{X\} = \{0\} \quad (11)$$

Это стандартное выражение для решения задачи собственных значений. Собственные векторы, которые получатся в результате этого уравнения, будут соответствовать собственным формам изгиба, которые мы хотим использовать для наших функций формы.

Каждый из нормализованных собственных векторов, полученных в результате вышеописанного процесса, даст пары точек, которые соответствуют собственной форме изгиба модели, созданной на рис. 8. Кривая, построенная через эти точки, будет определять функцию формы для изгиба. Мы можем определить функцию формы как непрерывную

функцию  $z$ , расстояния вдоль вала. В действительности, мы имеем нормализованные векторы  $\{X_i\}$ , где каждый член вектора,  $X_{in}$ , относится к нормализованному смещению каждой локальной координаты  $x_{in}$ , определяющей движение отдельных элементов массы  $m_n$  модели в местах  $z_n$  вдоль длины вала. Чтобы создать непрерывную функцию формы для каждого из них, мы должны подогнать полином к парам точек. Так как точки прогиба, которые мы имеем из собственных форм изгибов, не обязательно будут одинаково удалены друг от друга, интерполяционный подход Ньютона является возможным методом для определения соответствия кривой. Результирующие собственные формы изгибов для неоднородного вала, определенные с помощью этого метода, показаны на рис. 9.

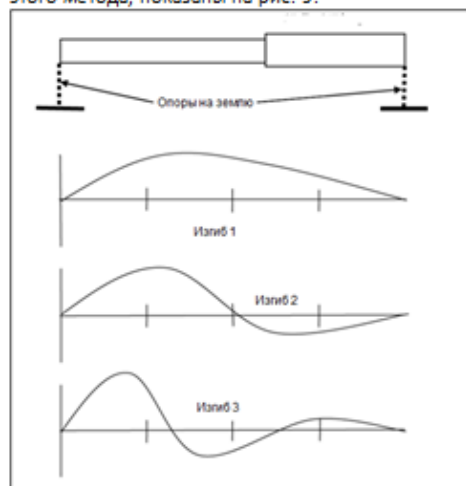


Рисунок 9. Собственные формы изгибов для неоднородного вала.

Это может быть сделано для создания полинома  $\beta_n$  для каждого(-ой) собственного вектора/собственной формы изгиба  $\{X_n\}$ . Для точного нахождения узлов мы можем определить нули этого полинома. Максимальные точки кривой будут хорошим приближением к точкам максимального прогиба в собственных формах изгибов и, таким образом, могут быть использованы для выбора плоскостей корректировки дисбаланса. Таким образом, они могут быть адаптированы к конкретному валу с различным поперечным сечением. Тот же метод определения величин корректировки дисбаланса, использованный в предыдущем обсуждении, будет использоваться, однако их расположение будет изменено на основе этого анализа.

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для того чтобы аналитически проверить достоверность описанного подхода, необходима простая программа роторно-динамического анализа. Многочисленные программы легкодоступны для создания конечно-элементных моделей и анализа реакции вращающихся структур. Любая программа, которая точно отображает массу, жесткость и гироскопические эффекты вращающегося вала и жесткость опоры, может быть использована в таком анализе. Используя такую программу, ранее описанный подход к балансировке на низкой скорости был применен к некоторым распределениям дисбаланса, которые были показаны на рис. 6 и рис. 7. Были рассмотрены равномерное распределение дисбаланса и несимметричное распределение дисбаланса. Были использованы данные из четырех условий равновесия. Состояние А – это состояние дисбаланса состояние. Состояние В имитирует эффект от выполнения традиционного баланса в двух плоскостях на низкой скорости. Процедура балансировки на малой скорости, обсуждаемая в данной работе, показана в состоянии С. Состояние D – это попытка смоделировать эффект от выполнения процедуры высокоскоростной балансировки вала. Результаты анализа были получены до третьей критической скорости или изгиба вала. Результаты были нормализованы относительно наибольшего отклика (который, как и следовало ожидать, является неисправленным дисбалансом из состояния А). Сравнения, показанные на рис. 10, представляют собой прогнозируемые реакции вала постоянного диаметра, который начинался с распределения дисбаланса, который был полностью в фазе, аналогично тому, что было показано ранее на рис. 6. Сравнения, показанные на рис. 11, представляют прогнозируемые реакции того же вала, но с исходным распределением дисбаланса, которое изменялось по фазе, аналогично тому, что было показано на рис. 7.

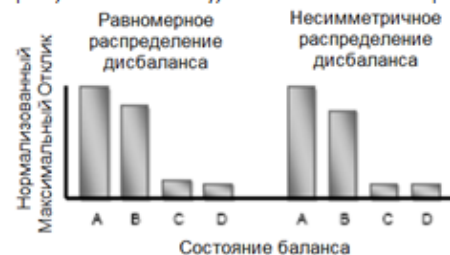


Рисунок 10. Аналитическое сравнение откликов для однородного вала с фазовым распределением дисбаланса при различных условиях баланса.

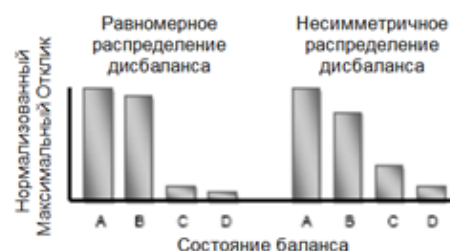


Рисунок 11. Аналитическое сравнение откликов для однородного вала с распределением внефазного дисбаланса при различных условиях баланса.

Далее был рассмотрен неоднородный ступенчатый вал, как обсуждалось ранее и было показано на рис. 9. На этом валу были выполнены те же наборы исходных состояний дисбаланса и сбалансированных состояний. Однако процедура балансировки, связанная с состоянием С, была изменена, как обсуждалось в предыдущем разделе данного доклада, чтобы учесть изменение собственной формы изгиба, связанное с валом, имеющим два сегмента разного диаметра. Сравнения, показанные на рис. 12, представляют прогнозируемые реакции для распределения дисбаланса, которое было полностью в фазе. Сравнения, показанные на рис. 13, представляют прогнозируемые реакции того же вала, но с первоначальным распределением дисбаланса, которое изменялось по фазе.

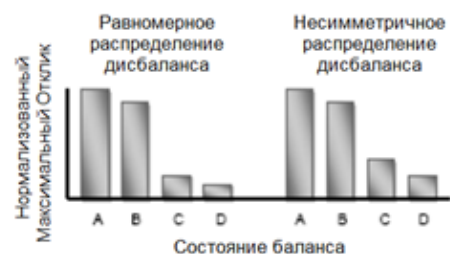


Рисунок 12. Аналитическое сравнение реакций для ступенчатого вала с фазовым распределением дисбаланса при различных условиях баланса.

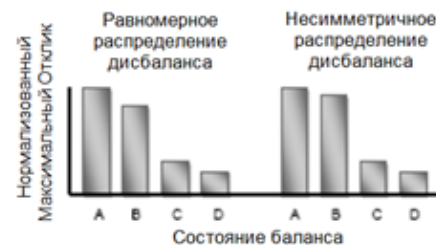


Рисунок 13. Аналитическое сравнение реакций для ступенчатого вала с распределением внефазного дисбаланса при различных условиях баланса.

Все сравнения показывают, что процедура разбалансировки на низкой скорости, рассмотренная в данной статье, дает значительно лучшие результаты, чем традиционный низкоскоростной баланс, и почти такие же как и высокоскоростной баланс.

Стандарты на газовые турбины обычно не определяют абсолютную величину дисбаланса вала, которая является допустимой, или установленную величину смещения центра тяжести, которая может быть разрешена. Скорее, они определяют уровень реакции, который является приемлемым. Такой подход применяется, потому что существует несколько способов устранения дисбаланса в высокоскоростных вращающихся машинах. В дополнение к корректировке баланса, реакция на дисбаланс может быть уменьшена путем проектирования опорных конструкций, которые включают в себя гибкость и демпфирование, механическими системами изоляции, которые контролируют коэффициент упругости пружин, поддерживающих вращающиеся составляющие, одновременно добавляя демпфирование в систему, или с помощью гидродинамических сил и демпфирования, которые могут быть введены с помощью гидродинамических подшипников цапф или амортизаторов с сжимающей пленкой в сочетании с подшипниками качения. Например, API 616 указывает, что балансировка на высокой скорости допустима, если это необходимо для удовлетворения требований к отклику, но она нежелательна, указывая, что балансировка на низкой скорости определенно предпочтительна [12]. Полученные здесь данные показывают, что для валов, работающих до третьей критической скорости, или гибкого состояния, низкоскоростная процедура может с большой вероятностью заменить высокоскоростную процедуру. Хотя это не дает абсолютной гарантии, что описанная